1 Teoría de la gravitación universal

Actividades del interior de la unidad

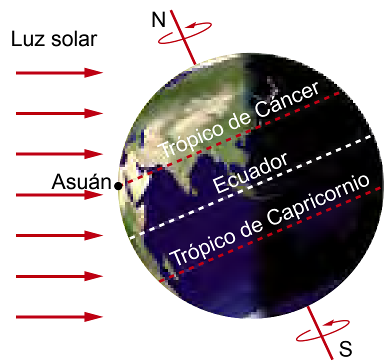
1. **Con frecuencia se afirma que Colón sabía que la Tierra era redonda, pero que nadie le creía. Discute la corrección de la proposición.**

   Es una afirmación errónea. Desde la Antigüedad se sabía que la Tierra era redonda. La controversia de Colón se debía a la viabilidad del viaje a «las Indias» cruzando el océano hacia el oeste.

2. **¿Cuál es la explicación de que el Sol no produzca sombra en Asuán al mediodía del solsticio de verano?**

   La ciudad de Asuán se encuentra en la margen derecha del río Nilo, en Egipto, justo sobre el trópico de Cáncer.

   Por eso, el día del solsticio de verano, exactamente al mediodía, el Sol está en la vertical de Asuán, como se representa en la figura y, por tanto, no se proyecta sombra.



3. **Explica por qué el sistema geocéntrico también se llama sistema ptolemaico.**

   Se llama sistema «ptolemaico» porque fue detalladamente expuesto en el *Almagesto* por el astrónomo, astrólogo, físico y geógrafo de Alejandría Claudio Ptolomeo, en el siglo II de nuestra era.

4. **¿Por qué decimos que en el viejo sistema geocéntrico del mundo había dos mecánicas diferentes?**

   En la visión de la Grecia clásica, que se mantuvo hasta el siglo XVII, la mecánica de los cielos (mundo supralunar) era diferente a la mecánica en la Tierra (mundo sublunar). Newton unificó las dos mecánicas.

5. **Explica en qué consiste la paralaje. ¿Por qué las estrellas aparentemente no muestran paralaje?**

   La paralaje es el cambio aparente en la posición de un objeto en relación con los objetos que están detrás de él debida al cambio de posición del observador. Así, nuestros ojos obtienen dos imágenes ligeramente diferentes de los objetos que observamos frontalmente y, luego, el cerebro combina las dos imágenes para producir una única imagen conjunta que tiene «profundidad».

   Las estrellas no muestran aparentemente paralaje porque están a una distancia enorme en comparación con la Tierra, e incluso con el tamaño de la órbita de la Tierra. Así, el diámetro de la órbita terrestre es de $3{,}0 \cdot 10^{11}$ m, mientras que la estrella más cercana al sistema solar, Alfa-Centauro, está a $3{,}3 \cdot 10^{16}$ m, o sea, cien mil veces más lejos.

6. Razona sobre la validez de esta proposición: «La mecánica celeste de Copérnico se basaba en principios diferentes a los de los antiguos griegos».

La proposición es falsa. En lo esencial, la mecánica celeste de Copérnico y de Ptolomeo coinciden. La diferencia está en la posición y en los movimientos de la Tierra.

7. ¿Cuántas vueltas alrededor del Sol da Mercurio en un año? La distancia media Mercurio-Sol es 0,39 veces la distancia Tierra-Sol.

Al aplicar la tercera ley de Kepler:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

donde T_1 y r_1 se refieren a la Tierra, y T_2 y r_2, a Mercurio, resulta:

$$\left(\frac{T_2}{1\ \text{año}}\right)^2 = \left(\frac{0{,}39 \cdot r_1}{r_1}\right)^3 \rightarrow T_2 = 0{,}24\ \text{años}$$

En consecuencia, en un año, Mercurio da:

$$\frac{1}{0{,}24} = 4{,}2\ \text{vueltas}$$

8. Calcula la excentricidad de una elipse en la que el eje mayor duplica al eje menor.

Aunque existen diferentes formas de expresar la excentricidad, es frecuente utilizar la siguiente:

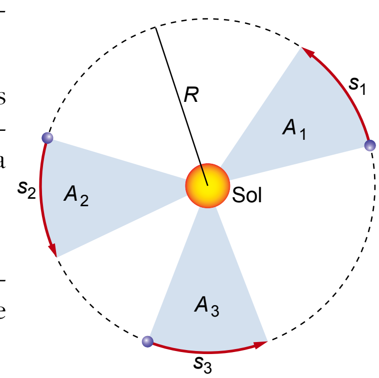
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor, respectivamente. Al sustituir, queda:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{(2 \cdot b)^2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866$$

9. Demuestra, a partir de la ley de las áreas, que en una órbita circular la velocidad del planeta es uniforme.

Como la órbita es circular, el Sol ocupa el centro geométrico.



En diferentes puntos de la órbita, las áreas barridas en un mismo tiempo, t, por el radio vector del planeta, A_1, A_2, A_3, etc., son iguales, tal como predice la ley de las áreas:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots$$

Pero como se trata de sectores circulares de igual radio, R, los arcos recorridos por el planeta tienen que ser idénticos:

$$s_1 = s_2 = s_3 = \ldots$$

En consecuencia, la velocidad orbital del planeta se mantiene constante:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = \ldots$$

10. Un asteroide sigue una órbita circular que completa en 820 días. ¿Cuánto mide el radio de su órbita, comparado con el de la Tierra?

Al aplicar la tercera ley de Kepler a la Tierra (T_1, r_1) y al asteroide (T_2, r_2), resulta:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 \rightarrow \left(\frac{820 \text{ días}}{365 \text{ días}}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 \rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 1{,}72 \rightarrow r_2 = 1{,}72 \cdot r_1$$

El radio de la órbita del asteroide es 1,72 veces mayor que el de la órbita terrestre.

11. Sabiendo que la distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna es unas sesenta veces el radio de la Tierra, estima la aceleración centrípeta de la Luna.

La aceleración centrípeta de la Luna será:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

donde suponemos que la órbita lunar es circular de radio $R = 60 \cdot R_T$.

Por otra parte, la velocidad orbital de la Luna se calcula según:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

Por tanto, queda:

$$a_c = \frac{\left(\dfrac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2}$$

Por otro lado, de acuerdo con la tercera ley de Kepler:

$$\frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_T}{R^3}$$

Entonces:

$$a_c = \frac{G \cdot M_T}{R^3} \cdot R = \frac{G \cdot M_T}{R^2} = \frac{G \cdot M_T}{(60 \cdot R_T)^2} = \frac{1}{3\,600} \cdot \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

Como veremos en la unidad 2 y sabemos de cursos anteriores:

$$\frac{G \cdot M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Esto es, la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. Por tanto, la aceleración centrípeta de la Luna resulta:

$$a_c = \frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{3\,600} = 2{,}72 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

12. Razona si es correcta la siguiente proposición: «Newton descubrió la fuerza de la gravedad».

Literalmente es falsa. Lo que Newton descubrió es que no se trata de un fenómeno peculiar de la superficie terrestre, sino que corresponde a una interacción presente en todo el universo. Es decir, que la misma fuerza que hace caer una manzana es la que mantiene en órbita a la Luna.

13. Comparamos dos satélites artificiales en órbita circular de igual radio, uno en Marte y otro en la Tierra. ¿Se moverán a la misma velocidad? ¿Depende de la masa de los satélites?

La constante de la tercera ley de Kepler vale:

$$\frac{T^2}{r^3} = C = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \cdot r^3$$

En Marte, la masa planetaria es menor, $M_M < M_T$; como los radios orbitales son iguales, $r_M = r_T$, el período en Marte será mayor que en la Tierra, $T_M > T_T$. Es decir, el satélite en órbita marciana es más lento.

La masa del satélite no interviene en absoluto.

14. Calcula con qué fuerza se atraen mutuamente el Sol y la Tierra, suponiendo que la órbita de la Tierra es circular y de radio 150 · 10⁶ km.

Datos: $M_{Sol} = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg; $M_{Tierra} = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg.

Obtenemos la fuerza por sustitución directa:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = G \cdot \frac{M_{Sol} \cdot M_{Tierra}}{R^2}$$

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \frac{2,0 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \cdot 6,0 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(150 \cdot 10^6 \cdot 10^3\ \text{m})^2} = 3,56 \cdot 10^{22}\ \text{N}$$

15. ¿Por qué la pleamar y la bajamar se alternan cada seis horas, aproximadamente?

La gravedad lunar deforma la superficie libre de los océanos y produce dos abultamientos (véase la página 46 del libro del alumno). Cada día, la rotación de la Tierra hace que un determinado punto de la costa pase dos veces bajo los abultamientos (dos pleamares) y dos veces bajo las zonas de mínimo nivel (dos bajamares).

16. ¿Qué dos masas idénticas deben colocarse a 1 m de distancia para que se atraigan con una fuerza de 1 µN?

Si despejamos la masa en la expresión de la fuerza gravitatoria:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = G \cdot \frac{m^2}{r^2} \rightarrow m = \sqrt{\frac{F \cdot r^2}{G}}$$

y sustituimos, resulta:

$$m = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-6}\ \text{N} \cdot (1\ \text{m})^2}{6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}}} = 122\ \text{kg}$$

17. Una masa puntual se mueve en línea recta con velocidad uniforme. Demuestra que su momento angular es constante respecto de cualquier punto.

Tomemos un punto cualquiera, *O*, como origen. El momento angular respecto de *O* vale:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$$

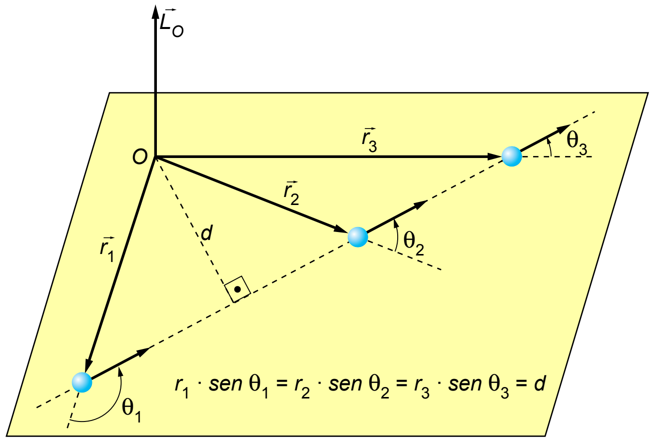
La dirección y el sentido de $\vec{L}_O$ son constantes: $\vec{L}_O$ es perpendicular al plano que forman *O* y la trayectoria recta del móvil, y el sentido lo da la regla del tornillo (hacia arriba en la situación representada en la figura de la página siguiente).

En cuanto al módulo, resulta:

$$L_O = m \cdot r \cdot v \cdot sen\ \theta = m \cdot v \cdot r \cdot sen\ \theta = m \cdot v \cdot d = \text{cte}$$

donde *d* es la distancia de *O* a la trayectoria recta, puesto que: $r \cdot sen\ \theta = d$.

En consecuencia, $\vec{L}_O$ es constante en módulo, dirección y sentido; esto ocurre para cualquier punto del espacio que se tome como origen.



18. El cometa Hale-Bopp tiene una órbita muy excéntrica (*e* = 0,997). Razona en qué punto de esta: a) Se mueve más deprisa. b) Su momento angular es mayor. c) Tiene menor momento lineal. d) Presenta mayor velocidad areolar.

a) Se mueve más deprisa en el perihelio, porque es el punto más cercano al Sol.

b) El momento angular es constante en toda la órbita.

c) El momento lineal tiene su valor menor en el afelio, punto más alejado del Sol, donde se mueve más despacio.

d) La velocidad areolar es constante en toda la órbita.

19. Calcula la velocidad areolar de Venus dividiendo el área de su órbita circular por el tiempo que tarda en recorrerla. ¿Se obtiene el mismo resultado que en el ejercicio resuelto? ¿Por qué? ¿Qué sucedería con un planeta que tuviera órbita elíptica?

Como suponemos que la órbita es circular, usando los datos del ejercicio resuelto 7, tenemos:

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{\pi \cdot R^2}{T} = \frac{\pi \cdot (1{,}082 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2}{224{,}7 \cdot 24 \cdot 3\,600\ \text{s}} = 1{,}9 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Obtenemos el mismo resultado que en el ejercicio resuelto 7, puesto que el planeta Venus sigue un m.c.u. y la velocidad orbital es constante en todo momento.

Si la órbita fuese elíptica, obtendríamos la velocidad areolar correcta dividiendo el área de la elipse por el período:

$$v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T}$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente.

20. ¿Es correcto decir que la velocidad de un planeta en órbita elíptica varía de forma inversamente proporcional a su distancia al Sol?

No es correcto, porque también interviene el ángulo variable que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Por ejemplo, tomando el momento angular constante, resulta:

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot sen\ \theta \ \rightarrow\ v = \left(\frac{L}{m \cdot sen\ \theta}\right) \cdot \frac{1}{r}$$

Solo cuando se comparan v_{afelio} y $v_{perihelio}$ se cumple, pues en ese caso $\theta = 90°$ y $sen\,\theta = 1$.